Γραμμική Άλγεβρα 1 10/11/15

$A \in F^{\nu\times\nu}$, $\det A \in F$ ισχύουν:

i) A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0_F$

ii) $\det(A^t) = \det A$

iii) Αν $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ $\det AB = \det A \cdot \det B$

Πρόταση: Έστω $A, B \in F^{\nu\times\nu}$. Υποθέτουμε $AB = I_\nu$, τότε ισχύει και $BA = I_\nu$, άρα ο A αντιστρέφεται και ο $B = A^{-1}$ (Με την ίδια απόδειξη το ίδιο συμπέρασμα ισχύει αν υποθέσουμε $BA = I_\nu$, αντί για $AB = I_\nu$)

Απόδειξη

$AB = I_\nu \Rightarrow \det(AB) = \det I_\nu = 1$ άρα $\det A \cdot \det B \overset{\text{πρόταση}}{=} \det(AB) = 1$

Επομένως $\det A \neq 0_F \xRightarrow{\text{πρόταση}} A$ αντιστρέφεται, άρα υπάρχει $C \in F^{\nu\times\nu}$ με $AC = CA = I_\nu$.

-Έχουμε $B = I_\nu \cdot B = (CA)\cdot B = C(AB) = C\cdot I_\nu = C$. Το αποτέλεσμα έπεται

Πρόταση: α) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \alpha_{22} & \\ * & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \in F^{\nu\times\nu}$ κάτω τριγωνικός. Τότε ~~detA~~

$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$

β) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & * \\ & \alpha_{22} & \\ 0 & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$ άνω τριγωνικός. Τότε $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$

Απόδειξη: α) Επαγωγή στο ν. Για $\nu=1$ $A = [\alpha_{11}]$ και ισχύει. Έστω $\nu \geq 2$ και υποθέτουμε ότι για $\nu-1$ ισχύει. Παρατηρούμε

$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ * & B & \\ * & & \end{bmatrix}$ με $B \in F^{\nu-1\times\nu-1}$ κάτω τριγωνικό. Επομένως, από υπόθεση επαγωγής $\det B =$ γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του $B = \alpha_{22}\alpha_{33}\ldots\alpha_{\nu\nu}$. Άρα από τον ορισμό det, ~~$\det A = \alpha_{11}\det$~~

$\det A = \alpha_{11}\cdot\det B - 0\cdot * + \ldots + 0 * = \alpha_{11}\det B = \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$

Υποθέτουμε A άνω τριγωνικός. Θέτουμε $C=A^t$. Φανερά C κάτω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$. Άρα από το α) $\det C=\alpha_{11}\ldots\alpha_{\nu\nu}$. Αφού $\det C=\det C^t=\det A$ το αποτέλεσμα έπεται.

Παράδειγμα

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \pi & e & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{5} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

Πόρισμα: Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$ διαγώνιος, τότε $\det A=\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$

Απόδειξη

A διαγώνιος $\Rightarrow$ A κάτω τριγωνικός και το αποτέλεσμα προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση.

Πόρισμα: Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \in F^{\nu\times\nu}$ άνω τριγωνικός, A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$

$\alpha_{ii}\neq 0_F$ για κάθε $i=1,2\ldots\nu$

Απόδειξη: Από προηγούμενη πρόταση $\det A=\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$

A αντιστρέφεται $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0_F$

Επειδή F σώμα $\alpha_{11}\ldots\alpha_{\nu\nu}\neq 0_F \Leftrightarrow \alpha_{ii}\neq 0$ για κάθε $i=1,2,\ldots\nu$.

Το αποτέλεσμα έπεται.

Παρατήρηση: Ομοίως αν $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \alpha_{22} & \\ * & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \in F^{\nu\times\nu}$ κάτω τριγωνικός, A αντιστρέφεται $\Leftrightarrow$ $\alpha_{ii}\neq 0_F$ για κάθε $i=1,2\ldots\nu$

Πρόταση i) $\det M_i(\lambda)=\lambda$

ii) $\det M_{ij}(\lambda)=1$

iii) $\det M_{ij}=-1$

Απόδειξη

i) $M_i(\lambda)$ διαγώνιος με $$\begin{array}{cc} & i\ \text{στήλη} \\ M_i(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&&0\\&\ddots&&&\\&&\lambda&&\\&&&\ddots&\\0&&&&1\end{bmatrix} & i\ \text{γραμμή}\end{array}$$

Άρα $\det M_i(\lambda)=1\cdot 1\cdots\lambda\cdot 1\cdots 1=1^{\nu-1}\cdot\lambda=\lambda$

Απόδειξη

ii) Αφού $M_{ij}(\lambda)$ άνω (αν $i<j$) ή κάτω (αν $i>j$) τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία 1 έχουμε $\det M_{ij}(\lambda)=1\cdot 1\cdots 1=1$.

Απόδειξη (για $\nu=2$ κ' $\nu=3$ μόνο)

iii) $\nu=2$ $\det M_{12}=\det\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=0\cdot 0-1\cdot 1=-1$

$\nu=3$ M_{12}, M_{13}, M_{23} $M_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ και $\det M_{12}=0-1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+0=-1$

Ομοίως για M_{13} και M_{23}

Παρατήρηση:

1) $A\xrightarrow{r_i\to\lambda r_i}B$ Έχουμε $B=[M_i(\lambda)]A \Rightarrow \det B=\det(M_i(\lambda))\cdot\det A$
$=\lambda(\det A)$

2) $A\xrightarrow{r_i\to r_i+\lambda r_j}C$ Έχουμε $C=[M_{ij}(\lambda)]A \Rightarrow \det C=\det(M_{ij}(\lambda))\cdot\det A$
$=\det A$

3) $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}D$ Έχουμε $D=M_{ij}A \Rightarrow \det D=\det M_{ij}\cdot\det A=-\det A$

Συμπέρασμα:

i) Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή του A με $\lambda\neq 0 \Rightarrow$ η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.

ii) Αν προσθέσουμε πολλαπλάσιο μιας γραμμής σε άλλη γραμμή, η ορίζουσα δεν αλλάζει.

iii) Εάν εναλλάξουμε δύο (διαφορετικές) γραμμές η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με -1_F.

$$\det\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \alpha_{1,1}\cdot\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\cdot\alpha_{2,1}$$

Για 3×3 $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} +$

Ορισμός: Έστω $\nu \geq 1$ Ορίζουμε $S_\nu = \{ f : \{1, \ldots \nu\} \to \{1, \ldots \nu\}$ με f 1-1 και επί$\}$

Παράδειγμα: $\underset{\mathbb{I}\nu\{1,2\}}{S_2} = \{ g\ \{1,2\} \to \{1,2\}$ 1-1 και επί$\}$

$= \{f_1, f_2\}$ με $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{συμβολισμός}} f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{matrix}$

$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1$

$S_3 = \{ g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ 1-1 και επί$\} = \{f_1, \ldots, f_6\}$ με

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ δηλ. $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$

$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ δηλ. $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$

$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ δηλ. $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$

$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Δεν είναι πίνακες!

Γενικά η S_ν έχει $\nu\cdot(\nu-1)(\nu-2)\ldots 2\cdot 1 = \nu!$

Παράδειγμα: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

Ορισμός: Έστω $f \in S_\nu$ και $1 \le i < j \le \nu$. Το ζεύγος (i,j) λέγεται αντιστροφή για την f αν $g(i) > g(j)$. Συμβολίζουμε $N(f) = \# \{(i,j) \;\; 1 \le i < j \le \nu$ και (i,j) αντιστροφή της $g\}$

και $sgn(g) = (-1)^{N(g)}$

π.χ. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to N(g) = \emptyset$ (αφού $g = id$ είναι άρα $sgn(g) = (-1)^0 = 1$)

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_5 \quad N(g) = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

Άρα $sgn(g) = (-1)^7 = -1 = (-1)^{\# N(g)}$

Πρόταση: Έστω $A = (a_{ij}) \in F^{\nu \times \nu}$. Τότε $\det A = \sum_{g \in S_\nu} sgn(g) \, a_{1,g(1)} a_{2,g(2)} \cdots a_{\nu,g(\nu)}$

Ανάπτυξη ορίζουσας ως προς i γραμμή ή στήλη

Πρόταση: (χωρίς απόδειξη) Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$ και $i \in \{1, \dots \nu\}$. Τότε

$i)$ (Ανάπτυξη κατά την i-γραμμή)

$\det A = \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij})$

$ii)$ Ανάπτυξη κατά την i-στήλη $\det A = \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A_{ji})$

όπου A_{ij} είναι ο $\nu-1 \times \nu-1$ υπο-πίνακας του A που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την i-γραμμή και την j-στήλη.

Παρατήρηση: Το $i)$ για $i=1$, είναι ο αρχικός ορισμός της ορίζουσας

π.χ. 3×3 $a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})$

$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ Ανάπτυξη κατά $1^η$ γραμμή (ορισμός det)

$$\det A = (-1)^{1+1} \alpha_{11} \det[\alpha_{22}] + (-1)^{1+2} \alpha_{12} \det[\alpha_{21}]$$
$$= \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

Ανάπτυξη κατά $2^η$ γραμμή:

$$\det A = (-1)^{2+1} \alpha_{21} \det[\alpha_{12}] + (-1)^{2+2} \alpha_{22} \det[\alpha_{11}] = -\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}\alpha_{11}$$

Ανάπτυξη κατά $1^η$ στήλη $\det A = (-1)^{1+1} \alpha_{11} \det[\alpha_{22}] + (-1)^{2+1} \alpha_{21} \det[\alpha_{12}]$

Ανάπτυξη ως προς την $2^η$ στήλη:

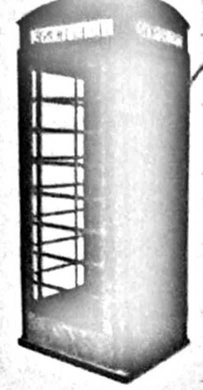
$$\det A = (-1)^{2+1} \alpha_{12} \det[\alpha_{21}] + (-1)^{2+2} \alpha_{22} \cdot \det[\alpha_{11}]$$

Παράδειγμα:
$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Ανάπτυξη $1^η$ γραμμή: $\alpha_{11} \det \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$
$+ \alpha_{13} \det \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$

" $2^η$ γραμμή: $-\alpha_{21} \det \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + \alpha_{22} \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$
$- \alpha_{23} \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$

" $3^η$ γραμμή $(-1)^{1+3} \alpha_{13} \det \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} + (-1)^{2+3} \alpha_{23} \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} +$
$+ (-1)^{3+3} \alpha_{33} \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$



Παρατήρηση: Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$. Τότε

i) Αν $i \neq j$ και προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της j γραμμής στην i γραμμή του A, ή ένα πολλαπλάσιο της j στήλης στην i στήλη του A.
Τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει.

ii) Εάν εναλλάξουμε δύο (διαφορετικές) γραμμές ή στήλες του A η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με -1_F.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$, $\det B = cb - ad = -\det(A)$

iii) Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή ή στήλη του A με $\lambda \in F$, τότε η ορίζουσα του A πολλαπλασιάζεται με λ.

π.χ. $E = \begin{bmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{bmatrix}$ Τότε $\det E = \lambda \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Παράδειγμα:

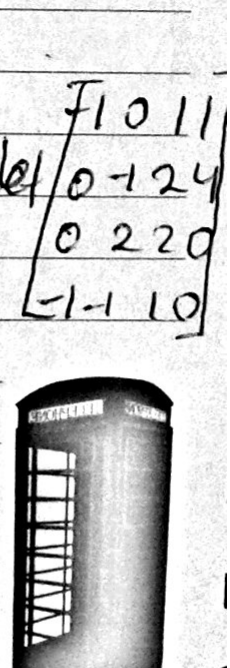
$$\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Ανάπτυξη 2ης στήλης}}{=} (-1)^{3+2} 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{2+3} \cdot 1 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 10 = -1$$

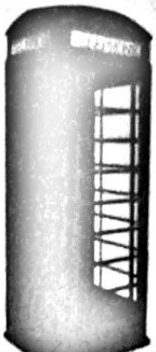
Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ & * & & \\ & & & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}(-1) \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$



$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dots = -14$$



Πόρισμα: Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$. Αν ο A έχει μια γραμμή (ή μια στήλη) με όλα τα στοιχεία ίσα με 0_F τότε $\det A = 0_F$

Απόδειξη: Έστω ότι η i-γραμμή είναι μια μηδενική. Αναπτύσσοντας ως προς την i-γραμμή και παίρνουμε $\det A = (-1)^{i+1} \cdot 0_F \cdot (\text{κάτι}) + (-1)^{i+2} \cdot 0_F \cdot (\text{κάτι}) + \dots = 0_F$

(Ομοίως αν η i-στήλη είναι μηδενική)

Πόρισμα: Αν $A \in F^{\nu \times \nu}$ έχει μια μηδενική γραμμή ή στήλη τότε A όχι αντιστρέψιμος

Απόδειξη: Ξέρουμε A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0_F$. Το αποτέλεσμα έπεται από το προηγούμενο πόρισμα.

Πόρισμα: Αν $A \in F^{\nu \times \nu}$. Αν ο A έχει δύο διαφορετικές γραμμές ίσες (ή δύο στήλες ίσες). Τότε $\det A = 0_F$ (και άρα ο A δεν αντιστρέφεται)

Απόδειξη: Έστω ότι ο A έχει τις i και j στήλες ίσες με $i \neq j$. Θέτουμε B τον πίνακα που προκύπτει από τον A αφαιρώντας την j στήλη από την i. Τότε $\det B = \det A$. Αλλά ο B έχει μια μηδενική στήλη, άρα $\det B = 0_F$.